



# INFOMAT

Mars 2013

## ABELPRISEN FOR 2013 TIL PIERRE DELIGNE

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2013 til **Pierre Deligne**, Institute for Advanced Study i Princeton, New Jersey, USA

*for meget betydningsfulle bidrag til algebraisk geometri, og for disse bidragenes gjennomgripende innflytelse på tallteori, representasjonsteori og relaterte felt.*

\*Deligne er aller best kjent for sin løsning av den dypeste av Weil-formodningene, nemlig analogien til Riemann-hypotesen for algebraiske varieteter over en endelig kropp. Delignes fremragende arbeid er et virkelig mesterstykke og har kastet nytt lys over kohomologi av algebraiske varieteter. Weil-formodningene har mange viktige anvendelser i tallteori, blant annet løsningen av Ramanujan-Petersson-formodningen og estimeringen av eksponensielle summer.

\*I en rekke artikler viste Deligne at kohomologien til singulære, ikke-kompakte varieteter har en mixed Hodge-struktur, noe som generaliserte den klassiske Hodge-teorien.

\*Sammen med Beilinson, Bernstein og Gabber gav Deligne definitive bidrag til teorien om perverse knipper. Denne teorien spilte en viktig rolle i Ngos bevis av fundamental-lemmaet for automorfe former. Teorien ble også brukt av Deligne selv til å vise Riemann-Hilbert-korrespondansen, som utvider Hilberts 21. problem til høyere dimensjoner.

\*Deligne og Lusztig brukte  $l$ -adisk kohomologi til å konstruere lineære representasjoner for endelige kroppar av Lie-type.

\*Sammen med Mumford introduserte Deligne begrepet algebraisk stack for å bevise at moduli-rommet til stabile kurver er kompakt.



---

INFOMAT kommer ut med 11 nummer i året og gis ut av Norsk Matematisk Forening. Deadline for neste utgave er alltid den 15. i neste måned. Stoff til INFOMAT sendes til

**infomat at math.ntnu.no**

Foreningen har hjemmeside <http://www.matematikkforeningen.no/INFOMAT>

Ansvarlig redaktør er Arne B. Sletsjøe, Universitetet i Oslo.

# ARRANGEMENTER

---

## Matematisk kalender

---

**2013:**

**Mars:**

20. *Abelprisen, offentliggjøring*, DNVA, Oslo

20. *Generalforsamling NMF*, NTNU, Trondheim

**Mai:**

27.-31. *Nordic Spring School in Logic*, Nordfjordeid

**Juni:**

17.-21. *Summer school 2013, Algebraic statistics*, Nordfjordeid

24-28. *Summer school in analysis and geometry*, Bergen

**Juli:**

2.-5. *Abelsymposiet 2013, Complex geometry*, NTNU, Trondheim

---

### **NORDIC SPRING SCHOOL IN LOGIC 2013, May, 27-31, 2013, Nordfjordeid**

The first Nordic Spring School in Logic is organized under the auspices of the Scandinavian Logic Society and is supported by the Department of Mathematics of the University of Oslo.

**Program:** The school program will comprise the following short courses on a variety of important topics in mathematical, computational, applied and philosophical logic, given by leading experts in their fields:

**Alexandru Baltag** and **Sonja Smets** (University of Amsterdam): Dynamic logics for interactive belief revision

**Dag Normann** (University of Oslo): The semantics of higher-order algorithms

**Erich Graedel** (RWTH Aachen): Logics for dependence and independence

**Joan Bagaria** (ICREA, University of Barcelona): Set theory: an introduction to the world of large cardinals

**Katrin Tent** (University of Muenster): Model theory: Simple and stable theories

**Kim Larsen** (Aalborg University): Logic and formal verification

**Michael Rathjen** (University of Leeds): Proof theory: From arithmetic to set theory

---

**Nina Gierasimczuk** (University of Amsterdam) and **Jakub Szymanik** (University of Groningen): Logic, computability and cognition

**Thierry Coquand** (University of Gothenburg): Type theory and univalent foundations

**Wolfgang Thomas** (RWTH Aachen): Logic, automata and games

**Øystein Linnebo** (University of Oslo and Birkbeck, University of London): Philosophy of logic: The problem of absolute generality

**Registration deadlines:**

Early: **MARCH 15, 2013**. Late: **MAY 1, 2013**

<http://www.mn.uio.no/math/english/research/groups/logic/events/springschool-logic2013.html>

---

### **SUMMER SCHOOL 2013: ALGEBRAIC STATISTICS, 17.-21. June 2013, Nordfjordeid**

**Program:** Three lecture series and extensive problem sessions.

**Alexander Engström** (Aalto Univ, Helsinki): Multigraded commutative algebra and graph decompositions

**Caroline Uhler** (IST Austria): Hypothesis testing and graphical models

**Thomas Kahle** (Univ München): Monomials, Binomials, Determinants

Registration deadline is **May 1st 2013**

<http://www.mn.uio.no/math/english/about/collaboration/nordfjordeid/conferences/alg-stat2013/>

---

### **SUMMER SCHOOL IN ANALYSIS AND GEOMETRY, June 24-28, 2013, Bergen**

Interplay between analysis and geometry proved to play a distinguished role in modern mathematics combining and developing many sophisticated methods and finding many applications in adjacent areas of sciences such as mathematical physics, mechanics and PDE. The aim of this summer school is to highlight the state-of-the-art and perspectives of those domains of analysis and geometry, which have gained wide inter-

---

# ARRANGEMENTER

national recognition lately and to introduce them to Ph.D. students and young researchers.

The scientific program of the school will consist of 5 mini courses of 4-5 hours by invited lecturers, and several one-hour lectures. We also plan to include poster session, where Ph.D. students and young participants can share their results.

**Boris Kolev**, LATR, CNRS and Université de Provence, Marseille, France: Geodesic flows on the diffeomorphism group of the circle

**Peter W. Michor**, Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Vienna, Austria: Convenient calculus and differential geometry in infinite dimensions

**Tohru Morimoto**, Nara Women's University and Doshisha University, Japan: Invitation to nilpotent analysis - weightedly involutive systems on filtered manifolds -

**Alexander Olevskii**, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel: Sampling and interpolation of signals

**Ludovic Rifford**, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice, France: Optimal transport in sub-Riemannian geometry

Deadline: **June, 1 2013**

<http://org.uib.no/school2013/index.html>

---

## THE ABEL SYMPOSIUM 2013: COMPLEX GEOMETRY, July 2–5 2013, NTNU, Trondheim

The scientific program will center around geometric questions in Several Complex Variables and Complex Dynamics, including holomorphic laminations/foiations, pluripotential theory, the  $\bar{\partial}$ -equation, CR-geometry, Function Theory and Kähler Geometry. The aim of the Abel symposium is to present the state of the art of the theory and related topics, and to discuss future research directions.

The organizing committee consists of John Erik Fornæss (NTNU), Marius Irgens (NTNU), Yum-Tong Siu (Harvard), Erlend F. Wold (Oslo) and Shing-Tung Yau (Harvard).

For further information, contact John Erik Fornæss [johnfo@math.ntnu.no], Marius Irgens [mariusi@math.ntnu.no] or Erlend F. Wold [erlendfw@math.uio.no].



## GENERALFORSAMLING I NORSK MATEMATISK FORENING, 20. mars 2013, NTNU, Trondheim

Årets generalforsamling i Norsk matematisk forening avholdes onsdag 20. mars 2013 i rom 1329, Sentralbygg 2, NTNU Gløshaugen

Saksliste:

1. Godkjenning av innkallingen
  2. Valg av møteleder og referent
  3. Godkjenning av årsberetning.
- Lederen orienterer om aktiviteter siste år.
4. Godkjenning av regnskap (revisjonsrapport)
  5. Godkjenning av budsjett 2013
  6. Fastsettelse av kontingenter
  7. Valg
  8. Eventuelt

Det blir enkel servering. Sakspapirer på foreningens nettsider: [http://matematikkforeningen.no/index.php?option=com\\_content&view=article&id=8&Itemid=12](http://matematikkforeningen.no/index.php?option=com_content&view=article&id=8&Itemid=12)

KONTINGENT:

Om du har årsmedlemskap og skal delta på generalforsamlingen, må kontingenten være betalt før årsmøtet. Hvis ikke ber vi om at kontingenten betales før 5. april.

Satsene er:

Årskontingent for studenter kr. 50,-

Årskontingent for ikke-studenter kr. 100,-

Livsvarig medlemskap kr. 1000,-

For institusjoner/bedrifter er kontingenten kr. 3000,- pr. år.

Som medlem i Norsk matematisk forening har du mulighet til å få medlemskap i The European Mathematical Society til en sterkt redusert pris: 175 kroner i stedet for 48 euro. Med medlemskapet følger blant annet EMS Newsletter. Du finner mer informasjon om medlemskapet her: <http://www.euro-math-soc.eu/node/2083>

Fristen er også her 5. april.

Betalingsinformasjon:

Norsk Matematisk Forening

Institutt for matematiske fag

NTNU 7491 Trondheim

Kontonummer: 8601.08.11351

Merk betalingen med "NMF, medlemstype, navn" eller "EMS2013, navn"

# FRA INSTITUTTENE

---

## Doktorgrader

---

**Tor Harald Sandve**, UiB forsvarte 4. mars 2013 sin avhandling med tittel *Multiscale simulation of flow and heat transport in fractured geothermal reservoirs* for graden Ph.D. Veiledere har vært Inga Berre og Jan Martin Nordbotten

---

---

## Nytt fra instituttene

---

Institutt for matematikk og naturvitenskap ved Universitetet i Stavanger har ansatt to matematikere: **Martin G. Gulbrandsen** og **Lars Halvard Halle**. De jobber innen algebraisk geometri og begynner fra august 2013.

---

---

## Ledige stillinger

---

### PROFESSORAT I MATEMATIKK-DIDAKTIKK VED HØGSKULEN I VOLDA

Vi opprettar eit professorat i matematikk-didaktikk frå 1. august 2014, med søknadsfrist **1. mai 2013**: <http://hivolda.easycruit.com/vacancy/917907/42406?iso=nn> [2]

---

### FØRSTEAMANUENSIS I MATEMATIKK VED UNIVERSITETET I BERGEN

Ved Matematisk institutt (<http://www.uib.no/math>) er det ledig ei stilling som førsteamanuensis i matematikk (rein matematikk), primært innan matematisk analyse. Det vert lagt vekt på dokumentert vilje og evne til samarbeid.

Utfyllande opplysningar om stillinga kan ein få ved å vende seg til instituttleiar Jarle Berntsen, e-post [jarle.berntsen@math.uib.no](mailto:jarle.berntsen@math.uib.no). Søknadsfrist: **15. mai 2013**

---

### POSTDOKTOR I MATEMATIKK VED UNIVERSITETET I BERGEN

Ved Matematisk institutt er det ledig ei stilling som postdoktor for ein periode på 2 år frå 15. august 2013, knytt til prosjektet *Geometry and Analysis of Complex Shapes and Applications to Mathematical Physics*, finansiert av Forskningsrådet og UiB (fellesløftet). Prosjektet fell inn under forskingsgruppa for rein matematikk. Målet med prosjektet er å studere klassisk og stokastisk 2D dynamikk av komplekse former i forbindelse med integrerbare system, geometrisk kontroll, ikkje-holonomisk geometri og klassisk kompleks analyse og deira bruk innan matematikk og fysikk. Ein del av prosjektet vil også vere fokusert på uendeleg dimensjonale mangfold av former og samanhengen mellom dei og kvantefeltteori. Det vert forventa at kandidaten har grunnleggjande kunnskapar og interesse innan geometri, analyse og matematisk fysikk.

Søklarar må ha oppnådd doktorgrad i rein matematikk, anvend matematikk, fysikk eller tilsvarande utdanning, eller ha levert doktoravhandlinga si til vurdering innan søknadsfristen er ute. Det er ein føresetnad at avhandlinga er godkjend før tilsetjing kan skje. Søklarar bør ha betydeleg røynsle frå kompleks og geometrisk analyse, differensialgeometri og dessutan ei grundig forståing av stokastiske prosessar. Bakgrunn i teoretisk fysikk vil også styrkje søknaden.

Søknadsfrist: **1. juni 2013**

Utfyllande opplysningar om stillinga kan ein få ved å vende seg til professor Alexander Vasiliev, e-post [alexander.vasiliev@math.uib.no](mailto:alexander.vasiliev@math.uib.no) /telefon +47 55 58 48 55.

---

### STIPENDIAT/POST.DOK VED UNIVERSITETET I OSLO

Det er utlyst 7 stipendiat- og 2 post.dok-stillinger ved Matematisk institutt, UiO. Søknadsfrist **15. april 2013**

For mer informasjon, se <http://www.mn.uio.no/math/om/jobb/>

---



# NYHETER

---

## ABELSTIPEND FOR 2013/2014

Søknadsfrist **15. april 2013**.

<http://matematikkforeningen.no/abelstipend/>

---

## RESULTATER, ABELKOKURRANSEN, 7. mars 2013

1. Einar Bogsnes Hegge, Kvinnherad vgs	35
2. Yimou Li, Red Cross Nordic UWC	26
3. Pei Gong, Red Cross Nordic UWC	24
3. Kari Lovise Lodsby, Hadeland vgs	24
3. Fredrik Nevjen, Mailand vgs	24
6. Yaojie Hu, Red Cross Nordic UWC	21
7. Ingerid Marie Fosli, St. Olav vgs	18
8. Johan Sokrates Wind, Kongsbakken vgs	15
9. Nuoya Wu, Red Cross Nordic UWC	13
10. Viktor Balch Barth, Oslo katedralskole	11
10. Fredrik Østrem, Senja vgs	11

---

## 2015 CIMPA RESEARCH SCHOOLS CALL FOR PROJECTS

The aim of the International Centre for Pure and Applied Mathematics CIMPA is to promote international cooperation in higher education and research in mathematics and their interactions, as well as related subjects, for the benefit of developing countries. Our action concentrates at the places where mathematics emerges and develops, and where a research project is possible.

CIMPA is a UNESCO centre based in Nice, financed by France, Switzerland, Norway and Spain, counting with the support of the University of Nice Sophia-Antipolis.

We organize research schools of about two weeks in developing countries. The purpose of these schools is to contribute to the research training of the new generation of mathematicians, women and men.

The Scientific Council and the Steering Council of CIMPA evaluate the projects and select the best and most appropriate. The research schools are organized locally with the help of CIMPA. CIMPA's financial contribution is essentially for young mathematicians from neighboring countries to be

---

able to attend the research school. CIMPA can help with obtaining funds from other sources. Additional and essential information can be found in the roadmap (available on the web site of CIMPA). You can also write to CIMPA for further information.

Research schools call for projects begins on March 1st, 2013.

The deadline for a (non-mandatory) pre-proposal is **June 15, 2013**. The complete proposal is due **October 1st, 2013**.

The application form can be found on CIMPA website <http://www.cimpa-icpam.org/spip.php?article154>, you can also write to [chimp@unice.fr](mailto:chimp@unice.fr)

<http://www.cimpa-icpam.org>

Proposals related to applications of mathematics are especially welcome.

---

## ABELPRISEN TIL PIERRE DELIGNE

Pierre Deligne ble født 3. oktober 1944 i Etterbeek i Brussel. Han er professor emeritus ved School of Mathematics, Institute for Advanced Study i Princeton, New Jersey, USA. Deligne kom til Princeton i 1984 fra Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) i Bures-sur-Yvette nær Paris, der han ble ansatt i 1970 som den absolutt yngste i fast stilling noen sinne.

Han studerte matematikk på Université Libre de Bruxelles, hvor han tok Licence en mathématiques i 1966, og Doctorat en mathématique i 1968. I 1972 fikk han doctorat d'État ès Sciences Mathématiques fra Université Paris-Sud 11.

Deligne begynte på universitetet i Brussel med ambisjon om å bli lærer i videregående skole, og å drive med matematikk som en hobby til egen fornøyelse. På universitetet, der han var student av Jacques Tits, oppdaget han imidlertid til sin store glede at «det går an å leve av å leke, det vil si å drive med forskning innenfor matematikk», slik han selv uttrykker det.

Pierre Deligne har mottatt mange høyt ansette internasjonale priser. Han ble tildelt Fields-medaljen på den internasjonale matema-

---



# ABELPRISEN 2013



tikerkongressen i Helsinki i 1978. I 1974 mottok han François Deruyts-prisen, som deles ut av det belgiske vitenskapsakademiet, og Henri Poincaré-medaljen, som deles ut av det franske vitenskapsakademiet. Han mottok A. De Leeuw-Damry-Bourlart-prisen i 1975 fra Fonds de la Recherche Scientifique (FNRS). I 1988 ble Deligne tildelt Crafoord-prisen sammen med A. Grothendieck av Kungliga Vetenskapsakademien. Balzan-prisen i matematikk, som Deligne mottok i 2004, er på 1 million sveitsiske franc. Balzan-stiftelsen krever at halvparten av beløpet skal brukes til støtte av unge forskere, og Deligne valgte å etablere et treårig forskningsstipend til støtte for de mest aktive unge matematikerne som arbeider i Russland, Ukraina og Hviterussland.

I 2008 ble Deligne tildelt Wolf-prisen i matematikk sammen med P. Griffiths og D. Mumford. I 2006 ble Deligne hedret av Kong Albert II av Belgia og fikk tittelen Vicomte, og postverket i Belgia utstedte et frimerke til ære for hans innsats innenfor fundamental matematikk.

Pierre Deligne har vært æresmedlem av Moskow Mathematical Society siden 1995 og London Mathematical Society siden 2003. I 1978 ble han valgt til utenlandsk æresmedlem av American Academy of Arts and Sciences, og i 2009 ble han medlem av American Philosophical Society. I 2009 ble han valgt til utenlandsk medlem av Kungliga Vetenskapsakademien.



## KOMITEENS BEGRUNNELSE

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2013 til Pierre Deligne *for meget betydningsfulle bidrag til algebraisk geometri, og for disse bidragenes gjennomgripende innflytelse på tallteori, representasjonsteori og relaterte felt.*

Geometriske objekter som linjer, sirkler og sfærer kan beskrives med enkle algebraiske likninger.

Den fundamentale forbindelsen mellom geometri og algebra som dermed har oppstått, har ført til utviklingen av algebraisk geometri, der geometriske metoder brukes til å studere løsninger av polynomlikninger, og omvendt, algebraiske teknikker anvendes for å analysere geometriske objekter.

Over tid har algebraisk geometri gjennomgått flere transformasjoner og ekspansjoner, og har fått en sentral posisjon med dype forbindelser til nesten alle områder av matematikken. Pierre Deligne har spilt en avgjørende rolle i mye av denne utviklingen.

Deligne er aller best kjent for sin imponerende løsning av den siste og dypeste av Weils formodninger, nemlig analogien til Riemann-hypotesen for algebraiske varieteter over en endelig kropp. Weil tenkte seg at metoder fra algebraisk topologi ville måtte benyttes for å bevise disse formodningene. I samme ånd utviklet Grothendieck og hans miljø teorien om  $l$ -adisk kohomologi, som så ble et grunnleggende verktøy i Delignes bevis. Delignes fremragende arbeid er et virkelig mesterstykke og har kastet nytt lys over kohomologien til algebraiske varieteter. Weil-formodningene har mange viktige anvendelser i tallteori, blant annet løsningen av Ramanujan-Petersson-formodningen og estimeringen av eksponensielle summer.

I en rekke artikler viste Deligne at kohomologien til singulære, ikke-kompakte varieteter har en blandet Hodge-struktur, noe som generaliserte den klassiske Hodge-teorien. Teorien om blandet Hodge-struktur er nå et grunnleggende og kraftfullt verktøy i algebraisk geometri og har gitt en dypere forståelse av kohomologi. Teorien ble også brukt av Cattani, Deligne og Kaplan til å bevise et teorem om algebraisitet som understøtter Hodgeformodningen.

Sammen med Beilinson, Bernstein og Gabber gav Deligne definitive bidrag til teorien om perverse knipper. Denne teorien spilte en viktig rolle i Ngos nylig bevis for fundamental-lemmaet. Teorien ble også brukt av Deligne selv til i stor grad å klarlegge beskaffenheten av Riemann-Hilbert-korrespondansen, som utvider Hilberts 21. problem til høyere dimensjoner. Deligne og Lusztig brukte  $l$ -adisk kohomologi til å konstruere lineære representasjoner for generelle endelige kroppar av Lie-type. Sammen med Mumford introduserte Deligne begrepet algebraisk stack for å bevise at moduli-



rommet til stabile kurver er kompakt. Disse og mange andre bidrag har hatt dyp innvirkning på algebraisk geometri og relaterte felt.

Delignes kraftfulle begreper, ideer, resultater og metoder vil fortsette å ha stor betydning for utviklingen av algebraisk geometri og for matematikken generelt.

## WEIL-FORMODNINGENE

**Delignes mest berømte resultat er hans spektakulære løsning av den siste og dypeste av Weil-formodningene, nemlig formodningen som omtales som analogien til Riemann-hypotesen for algebraiske varieteter over endelige kropper.**

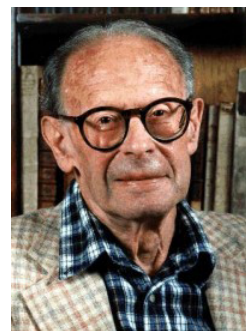
André Weil skrev i 1949 i artikkelen «*Numbers of solutions of equations in finite fields*»: «... and other examples which we cannot discuss here, seem to lend some support to the following conjectural statements, which are known to be true for curves, but which I have not so far been able to prove for varieties of higher dimension.»

Det Weil ikke klarte å bevise, er siden blitt kalt Weil-formodningene. Weil-formodningene dreier seg om såkalte zeta-funksjoner. Zeta-funksjoner er en matematisk konstruksjon som holder rede på antall løsninger av en likning, i stadig økende kroppsutvidelser. Når Weil sier det er kjent at formodningene stemmer for kurver, mener han at de stemmer for likninger i to ukjente. Varieteter i høyere dimensjoner, som Weil refererer til, svarer til likninger i tre eller flere ukjente.

Likningen  $x^2 - y^2 = 3$  beskriver en kurve i planet, og den har 4 løsninger i  $Z_5$ . 2 er ikke noe kvadrattall i  $Z_5$  og vi kan utvide  $Z_5$  med  $\alpha$  gitt ved at  $\alpha^2 = 2$ . Dette gir oss mange nye løsninger av likningen  $x^2 - y^2 = 3$ , for eksempel  $x=0, y=\alpha$  og  $x=\alpha, y=2$ . En opptelling gir oss i alt 24 forskjellige løsninger i den utvidede kroppen. De to tallene 4 og 24 bestemmer de to første leddene i zeta-funksjonen i dette eksemplet.

Det er i alt fire Weil-formodninger. Weil beviste selv at formodningene stemmer når likningen svarer til en kurve. For mer generelle likninger ble tre av formodningene bevist av andre matematikere i løpet av en periode på 10-15 år etter at Weils artikkel sto på trykk i 1949. Den siste formodningen, den vanskeligste og mest oppsik-

tsvekkende, omtales som analogien til Riemann-hypotesen og ble bevist av Pierre Deligne i 1974. Det ble tidlig klart at formodningene ville stemme dersom man kunne finne en bestemt type kohomologi, omtalt som Weil-kohomologi. Kohomologi er matematiske verktøy som ble utviklet på 1920-30-tallet for å forstå og systematisere kunnskap om geometriske former og strukturer. Jo mer komplisert struktur, jo mer kohomologi. Weil hadde ikke selv noen forslag til hvordan Weil-kohomologi skulle defineres, men han visste hvilke egenskaper kohomologien måtte ha for å kunne gi et bevis for Weil-formodningene.



André Weil

På slutten av 1940-tallet kjente heller ingen andre til noen kohomologi som kunne løse problemet og dermed forene det geometriske aspektet knyttet til løsning av likninger, og det aritmetiske aspektet, representert ved de endelige kroppene. Løsningen kom rundt 1960. Da introduserte Alexander Grothendieck begrepet étale-kohomologi, som han foreslo skulle spille rollen som den mystiske, ukjente, men helt nødvendige Weil-kohomologien. Problemet var imidlertid å bevise at étale-kohomologi tilfredsstilte kravene til å være en Weil-kohomologi. Grothendieck klarte det ikke, men det gjorde derimot hans unge student Pierre Deligne. Ved et komplisert resonnement klarte Deligne å bevise Weil-formodningene i sin fulle generalitet. Resultatet vakte berettiget oppsikt og brakte Deligne inn i det matematiske toppsjiktet.

## MODULI FOR STABILE KURVER

**For å kunne bevise at moduli-rommet av stabile kurver er kompakt, introduserte David Mumford og Pierre Deligne begrepet algebraisk stack. En algebraisk stack er et algebraisk geometrisk objekt som gir en abstrakt generalisering av et geometrisk rom.**

Såkalte **moduli**-problemer dreier seg om klassifisering av matematiske objekter. Vanligvis betyr klassifisering at man grupperer individer eller objekter i familier og underfamilier, og lager et hierarkisk system som stadig blir finere etter hvert





# ABELPRISEN 2013



som man kommer dypere inn i klassifikasjonen. Et moduli-problem handler også om å dele opp en mengde av matematiske objekter i klasser av ekvivalente objekter. En klassifikasjon av mengden av alle trekanter kan f.eks. være å dele inn trekantene etter formlikhet. Men moduli-problemer krever i tillegg at mengdene som klassifiserer objektene selv har en rik matematisk struktur.

Moduli-problemet for kurver innebærer derfor å finne et stort geometrisk objekt, som vi kaller **den universelle familien**, og et mindre objekt, som vi kaller **moduli-rommet**, med en “god” avbildning fra den universelle familien ned i moduli-rommet. Moduli-rommet er konstruert slik at hvert punkt i dette rommet svarer til en bestemt klasse av kurver, og motsatt, hver klasse av kurver er representert ved et punkt i moduli-rommet. Den universelle familien inneholder i tillegg til moduli-rommet, alle kurvene vi skal klassifisere, og hver kurve avbildes på nøyaktig det punktet i moduli-rommet som svarer til akkurat denne kurven. Moduli-rommet vil være det objektet som “klassifiserer” alle kurvene og eksistens av en universell familie sikrer at klassifikasjonen “husker” strukturen til kurvene. F.eks. krever vi at avbildningen fra den universelle familien inn i moduli-rommet er kontinuerlig, slik at kurver som ligner veldig på hverandre svarer til punkter i klassifikasjonen som ligger i nærheten av hverandre.

Når vi står ovenfor et moduli-problem, slik som med de stabile kurvene, kan det hende at det er relativt enkelt å finne selve moduli-rommet. Men det er slett ikke sikkert at det finnes noen universell familie over dette rommet.

Se på følgende eksempel: En veldig grov klassifisering av reelle tall går ut på å dele dem i to klasser, 0 og ikke 0. Med andre ord, den ene klassen inneholder kun ett element (0), mens den andre inneholder alle andre ( $\neq 0$ ). Moduli-rommet vil i dette tilfellet bestå av to punkter, mens kandidaten som den universelle familien vil være hele tallinja. Avbildningen fra den universelle familien ned i moduli-rommet tar 0 på det ene punktet og alt annet på det andre punktet. Denne avbildningen er imidlertid ikke kontinuerlig siden vi kan finne reelle tall som ligger så nær 0 vi bare måtte ønske, men som likevel avbildes på noe som har en ekte avstand til 0. Så i dette tilfellet finnes det et moduli-rom, men ikke noen universell familie over dette rommet.

Deligne og Mumford ønsket å vise at moduli-rommet av stabile kurver er kompakt. For å vise kompakthet trengte de å vite noe om den universelle familien.

Problemet med å konstruere en universell familie for stabile kurver ligger i at kurvene har interne symmetrier, og ulike kurver har forskjellig antall symmetrier. Igjen skal vi bruke et mer intuitivt eksempel til å illustrere hvilke problemer dette skaper. I stedet for kurver skal vi se på trekanter.

Vi tenker oss at vi har konstruert et moduli-rom som klassifiserer alle trekanter opp til formlikhet. De aller fleste trekanter har ingen interne ikke-trivielle symmetrier, men likebeinte trekanter har en og likesidede har fem ikke-trivielle interne symmetrier. De interne symmetriene kan vi bruke til å konstruere en ikke-konstant familie av trekanter, f.eks. over en sirkel, som i løpet av ett om-løp rundt sirkelen dreier trekanten 120 grader. Vi kan se for oss denne familien som en trekantet myk sylinder som vi bøyer og limer sammen til en slags trekantet smultring. Men før vi limer sammen vrir vi den ene enden 120 grader. Siden trekantene er likesidete vil endeflatene fortsatt passe perfekt sammen. Alle snitt i smultringen består av identiske trekanter, men tvisten før sammenliming gjør at dette ikke er noen konstant familie.

Bildet av denne ikke-konstante familien inn i den universelle familien vil imidlertid være konstant, siden vi hele tiden har å gjøre med den samme trekanten. Men et krav til en universell familie er at den skal være universell, i den forstand at den “ser” alle mulige andre familier. I dette tilfellet gjør den ikke det, hvilket betyr at det ikke finnes noen universell familie. Og den underliggende årsak til at vi ikke får det til i dette tilfellet er altså at likesidete trekanter har interne symmetrier.

Deligne og Mumfords svar på disse problemene var å introdusere et nytt begrep, såkalte algebraiske stacks, som siden har blitt hetende Deligne-Mumford-stacks eller bare DM-stacks. I motsetning til det vanlige moduli-rommet, så vil en DM moduli-stack ta opp i seg informasjon om de interne symmetriene til trekantene. Dersom vi nå forsøker å bygge en universell familie over denne moduli-stacken, har vi mye større sjanse til å lykkes, siden det som lagde problemene for oss, på sett og vis er blitt kodet inn i strukturen til de nye objektene vi jobber med.