



INFOMAT

Mars 2014

ABELPRISEN TIL YAKOV G. SINAI

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2014 til Yakov Grigorevich Sinai, Princeton University og Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау for hans fundamentale bidrag til teorien for dynamiske systemer, ergodeteori og matematisk fysikk.

Yakov G. Sinai er født i 1935 i Moskva og har sin utdannelse fra det statlige universitetet i hjembyen. Hans veileder var Andrey Kolmogorov. Sinai er tilknyttet Landau-instituttet i Moskva og Princeton-universitetet i New Jersey, USA.

Yakov Sinai er blant de mest innflydelses-

rike matematikerne i det 20. århundre. Han har stått bak viktige gjennombrudd i vår kunnskap om dynamiske systemer, matematisk fysikk og sannsynlighetsteori. Mange matematiske resultater bærer hans navn, som Kolmogorov-Sinai-entropi, Sinais biljard, Sinais virrevandring, Sinai-Ruelle-Bowen-mål og Pirogov-Sinai-teori.

Yakov Sinai har gjennom de siste 50 årene skrevet over 250 artikler og flere bøker, samtidig som han har veiledet mer enn 50 doktorgradsstudenter. Han har mottatt en mengde internasjonale æresbevisninger, bl.a. Leroy P. Steele Prize for Lifetime Achievement, Wolfprisen, Nemmersprisen, Henri Poincaré-prisen og Dobrushin International Prize. Viere har han mottatt Boltzmanns gullmedalje og Dirac-medaljen.

Sinai får overrakt Abelprisen i Oslo den 20. mai 2014.

INFOMAT kommer ut med 11 nummer i året og gis ut av Norsk Matematisk Forening. Deadline for neste utgave er alltid den 15. i neste måned. Stoff til INFOMAT sendes til

infomat at math.ntnu.no

Foreningen har hjemmeside <http://www.matematikkforeningen.no/INFOMAT>

Ansvarlig redaktør er Arne B. Sletsjøe, Universitetet i Oslo.

Matematisk kalender

2014:

Mai:

20. *Abelprisutdeling*, Oslo

21. *Abelforelesningene*, Oslo

August:

13.-21. *ICM 2014*, Seoul, Korea

September:

15.-19. *Stochastics of Environmental and Financial Economics*, DNVA, Oslo

Nye doktorgrader

Høgskolelektor ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, **Hans Kristian Nilsen**, forsvarte 5. mars 2014 sin avhandling *Learning and Teaching Functions and the Transition from Lower Secondary to Upper Secondary School* for Ph.D-graden i matematikkdidaktikk ved UiA.

Sammendrag:

Denne studien følger åtte elever i overgangen fra ungdomsskole til videregående hvor arbeidet med funksjoner og tilhørende begreper som stigningstall, proporsjonalitet og derivasjon står sentralt.

Elevene var fordelt på fire ungdomsskoler og disse fordelte seg videre på fire videregående skoler. På videregående gikk tre av disse elevene yrkesfaglig studieretning, mens de øvrige fem gikk studiespesialiserende. Observasjon i klasserommene og intervjuer/samtaler med elevene og deres lærere utgjør majoriteten av det empiriske materialet.

Forskningsspørsmålene fokuserer på elvenes læringsprosess, undervisningen og mulige sammenhenger mellom læring og undervisning.

I avhandlingen analyseres det empiriske materialet ut ifra et sosiokulturelt perspektiv, hvor semiotikk, semiotiske representasjoner og semiotiske kjeder står sentralt. Et sentralt analyseverktøy er Steinbrings epistemologiske trekant.

Samlet sett avdekker altså studien undervisningsmessige utfordringer i overgangen fra ungdomsskole til videregående.

Studiet ble gjort som en del av forskningsprosjektet «Teaching Better Mathematics».

Utlysninger

POST-DOCTORAL FELLOWSHIP

in mathematical modeling of genomes in stem cells is available for 3 years at the Institute of Basic Medical Sciences, from June 1, 2014. The project is funded by the Molecular Life Science program of the University of Oslo.

Application deadline: **11. april 2014**

<http://uio.easycruit.com/>

[vacancy/1153225/70335?iso=no](http://uio.easycruit.com/vacancy/1153225/70335?iso=no)

FØRSTEAMANUENSIS I MATEMATIKK

Ved Matematisk institutt, UiB, er det ledig ei stilling som førsteamanuensis i matematikk (rein matematikk), primært innan algebraisk geometri eller kommutativ algebra.

Under vurderinga vert det teke omsyn ikkje berre til den akkumulerte akademiske produksjonen, men også til kandidaten sitt potensial for vitskapleg utvikling. For å verte aktuelle, må kandidatar med vitskapleg hovudkvalifisering utanfor felta algebraisk geometri og kommutativ algebra dokumentere eineståande kvalifikasjonar innan vitskap og undervisning.

Utfyllande opplysningar om stillinga kan ein få ved å vende seg til professor Jarle Berntsen, e-post jarle.berntsen@math.uib.no, eller førsteamanuensis Morten Brun, e-post morten.brun@math.uib.no.

Søknadsfrist: 15. april 2014.

<http://www.jobbnorge.no/ledige-stillinger/stilling/99564/førsteamanuensis-i-matematikk>

STIPENDIAT/POST.DOK- STILLINGER I OSLO

Ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo er det ledig 13 stillinger som stip./post.dok. Se <http://www.mn.uio.no/math/om/jobb/> for mer informasjon.

Søknadsfrist: 20. april 2014

NYHETER

STIPENDIATSTILLING I ALGEBRA I TROMSØ

Ved Universitetet i Tromsø er det ledig en stipendiatstilling i algebra. (jobbnorge.no/en/available-jobs/job/100990/phd-candidate-in-algebra)

Søknadsfrist: **1. mai 2014**

FØRSTEAMANUENSIS I ANVEND OG UTREKNINGSORIENTERT MATEMATIKK

Ved Matematisk institutt, UiB er det ledig ei stilling som førsteamanuensis i anvend og utrekningsorientert matematikk.

Ved vurderinga av søkjarane vert det lagt vekt på erfaring i leing av forskingsprosjekt og koordinering av forskingsaktivitet og dessutan erfaring med undervisning. Det vert vidare lagt vekt på dokumentert vilje og evne til samarbeid.

Utfyllande opplysningar om stillinga kan ein få ved å vende seg til professor Jarle Berntsen, e-post jarle.berntsen@math.uib.no eller professor Hans Munthe-Kaas, e-post hans.munthe-kaas@math.uib.no

Søkjarane må ha oppnådd norsk doktorgrad i anvend og/eller utrekningsorientert matematikk eller tilsvarande utanlandsk kompetanse innan søknadsfristen er ute.

Søknadsfrist: 15. mai 2014.

<http://www.jobbnorge.no/ledige-stillinger/stilling/99823/førsteamanuensis-i-anvend-og-utrekningsorientert-matematikk>

MATH.SCAND. GIS BORT

Fra min tid som norsk redaktør har jeg en (nesten) komplett samling av tidskriftet fra vol 1 i 1953 til vol 113 i 2013. Jeg har ikke lenger plass til denne og jeg vil gjerne ha forslag til verdige mottakere, feks samarbeidende institusjoner evt privatpersoner.

Magnus Landstad
magnusla@math.ntnu.no

LITT AV HVERT FRA INSTITUTTENE

Lisa Lorentzen og **Magnus Landstad**, begge NTNU, er nå professor emerita og emeritus etter å ha fylt 70 i høstsemesteret.

Anton Evgrafov er tilsatt som professor (optimering) ved Institutt for matematiske fag, NTNU, fra 1. januar 2014. Samtidig er **Dieter Hömberg** ansatt som professorII i optimering.

Marius Thaulé er tilsatt som postdoktor (topologi) ved NTNU for 4 år. Dessuten er det tilsatt fire nye postdoktorer for 2 år, også ved NTNU: **Antoine Tambue** (dna), **Reiner Hermann** (algebra), **Winston Heap** (analyse) og **Timo van Opstad** (dna).

Carlos Perez-Garrandeser vil være ved UiO, (SCV) på et halvt års gjesteforskerstipend (NILS) fra Spania fra mars 2014.

UTDANNINGSMIDLER TIL MATEMATIKKPROSJEKT

Matematikkprosjektet KTDiM (Kvalitet, tilgjengelighet og differensiering i grunnutdanningen i Matematikk) med **Mats Ehrnström** som prosjektleder ble 10.januar tildelt Innovative Utdanningsmidler fra NTNU sentralt. Beløpet er på kr. 4 138 000 over en treårsperiode. Fakultetet forventes å yte en tilsvarende sum.

DKNV-PRIS TIL ANDRIY BONDARENKO

Andriy Bondarenko ble 7.mars tildelt Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs sin pris for yngre forskere innen naturvitenskap. Bondarenko er for tida postdoktor ved Institutt for matematiske fag, NTNU, og arbeider sammen med Kristian Seip. DKNVS sier «*Hans forskningsområde er diskret matematikk, kombinatorikk og approksimasjonsteori. I et nylig publisert arbeid har Bondarenko løst et sentralt problem om den såkalte Borsuk-formodningen i diskret matematikk. Dette resultatet har vakt betydelig oppsikt innen feltet, og han har gjort seg bemerket på høyeste internasjonale nivå*»

NYHETER

ABELSTIPEND FOR STUDIEÅRET 2014/2015

Styret for Niels Henrik Abels minnefond har gitt Norsk matematisk forening i oppgave å forestå utdeling av årlige Abelstipend til studenter som er opptatt i masterprogram i matematiske fag ved norske læresteder. Abelstipendene har som formål å stimulere lovende studenter til videre studier og forskning i matematiske fag.

Abelstipendet finansieres av Abelfondet og seismikkselskapet Petroleum Geo-Services (PGS).

Neste søknadsfrist er **15. april 2014**. Det kan da søkes om midler for studieåret 2014/2015.

Abelstipend kan tildeles studenter som er opptatt i masterprogram i matematiske fag ved norske læresteder. Abelstipendene har som formål å stimulere lovende studenter til videre studier og forskning i matematiske fag.

Et Abelstipend er et personlig stipend som skal dekke utgifter i forbindelse med opphold ved et utenlandsk lærested. Som faglig minstekrav for tildeling av Abelstipend kreves normalt 80 studiepoeng i matematiske fag. Hovedkriteriet for tildeling er faglig kvalitet. Web: <http://matematikkforeningen.no/abelstipend/>



KONGEN HEDRER IDUN REITEN

Professor emerita Idun Reiten er utnevnt til Kommandør av Den kongelige Norske St. Olavs Orden. Utmerkelsen får hun for sin innsats som matematiker.

Idun Reiten er Norges mest meritterte matematiker. Hun har mottatt nasjonale og internasjonale æresbevisninger som følge av sin forskning over

40 år. I 1982 ble hun som første nordiske kvinne professor i matematikk. Fagområdet er algebra. Ifølge NTNU ble hun ansatt som første algebraiker ved Universitetet i Trondheim og under hennes ledelse vokste det fram en anerkjent algebragruppe som i dag teller over 20 medlemmer.

- Vi ved Institutt for matematiske fag ved NTNU synes det er flott at Idun vert tildelt St. Olavs Orden. Ho har sidan 70-talet betydd svært mykje for fagmiljøet, og er framleis ein inspirerende rollemodell for mange. Dette er velfortent, og vi gleder oss saman med henne, sier instituttleder Einar Rønquist i pressemeldinga.

Reiten er født i Klæbu i 1942. Matematikeren går for å være en fremragende lærer og formidler. Hun er fortsatt svært aktiv, og har oppnådd noen av sine mest betydningsfulle forskningsresultater de siste ti årene. I 2007 mottok hun Norges Forskningsråds pris for fremragende forskning. Samme året ble hun som første kvinne innvalgt i matematikkgruppa til Kungliga Vetenskapsakademien. I 2009 mottok hun Fridtjof Nansens belønning for fremragende forskning med den tilhørende Nansenmedaljen.

MEDLEMSKAP I EMS

Som medlem i NMF får man halv pris på medlemskap i EMS (European Mathematical Society), og vi oppfordrer alle våre medlemmer til å benytte seg av dette tilbudet. Ikke bare får man diverse medlemsfordeler, men kanskje enda viktigere: Man støtter opp om det europeiske samarbeidet.

Kontingenten for 2014 er satt til NOK 200,- (tilsvarende 24 euro), som kan betales til NMFs bankkonto:

Norsk matematisk forening
Institutt for matematiske fag
NTNU
7491 Trondheim
Kontonummer: 8601.08.11351

Merk innbetalingen «EMS medlemskap 2014 - Ditt Navn». Betalingsfristen er **15. april**.

ABELPRISEN 2014

The Norwegian Academy of Science and Letters has decided to award the Abel Prize for 2014 to **Yakov G. Sinai**, Princeton University and Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy



of Sciences “*for his fundamental contributions to dynamical systems, ergodic theory, and mathematical physics.*”

Ever since the time of Newton, differential equations have been used by mathematicians, scientists and engineers to explain natural phenomena and predict how they evolve. Many equations incorporate stochastic terms to model unknown, seemingly random, factors acting upon the evolution. The range of modern applications of deterministic and stochastic evolution equations encompasses such diverse issues as planetary motions, ocean currents, physiological cycles, population dynamics, and electrical networks, to quote just a few. Some of these phenomena can be foreseen with great accuracy, while others seem to evolve in a chaotic, unpredictable way. Now it has become clear that order and chaos are intimately connected: one may find chaotic behavior in deterministic systems, and conversely, the statistical analysis of chaotic systems may lead to definite predictions.

Yakov Sinai made fundamental contributions in this broad domain, discovering surprising connections between order and chaos and developing the use of probability and measure theory in the study of dynamical systems. His achievements include seminal works in ergodic theory, which studies the tendency of a system to explore all of the available states, according to certain time statistics; and statistical mechanics, which explores the behavior of systems made of a very large number of particles, such as molecules in a gas.

Sinai’s first remarkable contribution, inspired by

Kolmogorov, was to develop an invariant of dynamical systems. This invariant has become known as the Kolmogorov-Sinai entropy, and it has become a central notion for studying the complexity of a system through a measure-theoretical description of its trajectories. It has led to very important advances in the classification of dynamical systems.

Sinai has been at the forefront of ergodic theory. He proved the first ergodicity theorems for scattering billiards in the style of Boltzmann, a work he continued with Bunimovich and Chernov. He constructed Markov partitions for systems defined by iterations of Anosov diffeomorphisms, this leading to a series of outstanding works showing the power of symbolic dynamics to describe various classes of mixing systems.

With Ruelle and Bowen, Sinai discovered the notion of SRB measures: a rather general and distinguished invariant measure for dissipative systems with chaotic behavior. This versatile notion has been very useful in the qualitative studies of some archetypal dynamical systems as well as in the attempts to tackle real-life complex chaotic behavior such as turbulence.

Sinai’s other pioneering works in mathematical physics include: random walks in random environment (Sinai’s walks), phase transitions (PirogovSinai theory), one-dimensional turbulence (the statistical shock structure of the stochastic Burgers equation, by E-Khanin-Mazel-Sinai), the renormalization group theory (BleherSinai), and the spectrum of discrete Schroedinger operators.

Sinai has trained and influenced a generation of leading specialists in his research fields. Much of his research has become a standard toolbox for mathematical physicists. His works had and continue to have a broad and profound impact on mathematics and physics, as well as on the ever-fruitful interaction of these two fields.



ABELPRISEN 2014

ENTROPIEN TIL ET DYNAMISK SYSTEM

I 1948 publiserte den amerikanske matematikeren Claude E. Shannon en artikkel under tittelen ”*A Mathematical Theory of Communication*”. Hans ide var å bruke matematisk formalisme til å beskrive kommunikasjon som fenomen. Formålet med kommunikasjon er å formidle et budskap, men de som står for kommunikasjonen velger selv hvordan de vil gjøre det. Noen bruker mange ord eller tegn, mens andre kan få fram en klar mening på en mer kortfattet måte. Informasjonsmengden kan være den samme, men informasjonstettheten vil variere. Et eksempel er såkalt SMS-pråk. Når man taster på en mobiltelefon forsøker man å få fram en bestemt mening ved bruk av færrest mulige tastetrykk. Meldingen ”I love You” består av 10 tegn, mens meldingen ”i <3 u” klarer seg med 6. Likevel formidler meldingene nøyaktig samme budskap.

Shannon introduserte begrepet entropi som et mål for informasjonstetthet. I hvilken grad vil neste tegn i meldingen fortelle oss noe vi ikke allerede vet? Høy Shannon-entropi betyr at hvert nytt tegn lærer oss noe nytt om budskapet, lav Shannon-entropi uttrykker at vi kun får bekreftet det vi allerede vet.

På slutten av 1950-tallet ledet Andrey Kolmogorov et seminar om dynamiske systemer ved universitetet i Moskva. Et spørsmål som stadig dukket opp dreide seg om invarianter for dynamiske systemer og spesielt invarianter som kunne skille mellom ikke-isomorfe systemer. Svaret kom fra den unge seminardeltageren Yakov Sinai og handlet om entropi.

Et dynamisk system er en beskrivelse av et fysisk system og hvordan det utvikler seg over tid. Systemet kan befinne seg i mange mulige tilstander, og hver tilstand representeres av et element i et tilstandsrom. Tilstandsrommet blir en slag geometrisk adressebok, en fortegnelse over alle mulige tilstander. Dynamikken, eller utviklingen i det dynamiske systemet, er beskrevet av en vei i tilstandsrommet. Veien forteller oss hvordan systemet går videre fra en gitt tilstand til neste.

Dynamiske system kan være deterministiske. Det innebærer at neste tilstand er forutbestemt. For ek-

sempel er dette tilfellet for en svingende pendel. På et gitt sted i banen og med en gitt hastighet, vil fysikkens lover beskrive hva som skjer videre med pendelen. Dersom systemet dreier seg om å kaste terning, har vi en annen ytterlighet, der systemet er stokastisk. Framtida er fullstendig uviss, forrige kast sier ingenting om hva neste kast vil gi.

Normalt vil vi ha god oversikt over hva som skjer på kort sikt innenfor et dynamisk system. På lang sikt derimot, er det mye vanskeligere å få full oversikt. Problemet med værvarsling illustrerer dette fenomenet. Værsituasjonen, gitt ved trykk, temperatur, vind, luftfuktighet osv. beskrives av et dynamisk system. Det er få vanskeligheter knyttet til å varsle været for de neste ti minuttene, men går vi ti dager fram i tid blir usikkerheten veldig stor.

Sinai ønsket å kvantisere denne karakteristikken av et dynamisk system. Inspirert av Shannons entropi for informasjon, og innen rammen av Kolmogorovs matematiske verksted, definerte Sinai begrepet entropi for såkalte målbevarende dynamiske system, i dag kjent som Kolmogorov-Sinai-entropi. Dette begrepet ga et konstruktivt svar på spørsmålet fra Kolmogorovs seminar: Kolmogorov-Sinai-entropi som invariant separerer ikke-isomorfe dynamiske systemer.

Kolmogorov-Sinai-entropi gir en rik generalisering av Shannons entropi. En melding i Shannons forstand, gitt ved en uendelig sekvens av tegn, svarer til en tilstand, og tilstandsrommet består av alle uendelige sekvenser. Dynamikken dreier seg om å flytte blikket et hakk videre i sekvensen. Entropi handler om i hvilken grad det er mulig å forutse neste tegn i sekvensen.

I et annet eksempel kan det fysiske systemet være en beholder fylt med gass. Tilstander i dette systemet er beskrevet av gass-molekylenes posisjon og hastighet på et gitt tidspunkt, og dynamikken er gitt av naturlover som forutsier hvilken tilstand gassen vil være i et lite tidsintervall senere. Igjen vil graden av kompleksitet og kaotisk oppførsel hos molekylene være det som kodes inn i begrepet entropi.

Kolmogorov-Sinai-entropi er altså et mål på uforutsigbarhet i et dynamisk system. Jo mer

ABELPRISEN

uforutsigbarhet vi finner i prosessene, jo større er systemets entropi. Dette passer godt med Shannons informasjonsteoretiske entropi, hvor uforutsigbarhet om hva som vil bli formidlet faktisk er det som kommer til å gi oss ny informasjon. Det passer også godt med begrepet entropi slik vi kjenner det fra termodynamikken, der større uorden gir større entropi. Uforutsigbarhet og uorden er nært beslektet.

Kolmogorov-Sinai-entropi har hatt stor betydning for vår forståelse av kompleksitet av dynamiske systemer. Selv om ikke den formelle definisjonen er spesielt komplisert, viser begrepet sin styrke gjennom de svært treffsikre svarene det gir på sentrale spørsmål innenfor klassifikasjon av slike systemer.

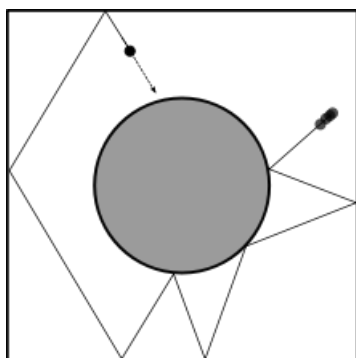
DYNAMISK BILJARD

En dynamisk biljard er en idealisert generalisering av spillet biljard, der det tenkte biljardbordet kan ha alle mulige former, og vi bare bruker én ball. Bordet kan gjerne ha høyere dimensjon enn 2, og i noen tilfeller har det også avgrensede felt med vant, hvor ballen ikke slipper inn.

Mer formelt er en dynamisk biljard et dynamisk system hvor en masseløs og punktformet partikkel beveger seg innenfor et avgrenset område. Partiklen veksler mellom å bevege seg friksjonsløst (dvs. med konstant hastighet) langs rette linjer og å reflekteres fra biljard-vantet ved speilende refleksjoner, uten å tape hastighet. Speilende refleksjoner betyr at innfallsvinkel og refleksjonsvinkel er like store.

Et aktuelt eksempel på en dynamisk biljard er Sinais biljard. Sinais biljard består av et kvadratisk bord med et sirkulært felt i midten hvor ballen ikke slipper inn. Bordet er flatt, uten noen form for krumning. Ballen vil vekselvis reflekteres fra det ytre vantet og vantet rundt det sirkulære midtfeltet.

Sinais biljard dukket opp som et resultat av studier



er av modellen for en såkalt ideell gass. I denne modellen tenker man seg at gass består av en mengde små kuler (gassmolekyler) som støter mot hverandre i elastiske støt og som også reflekteres fra veggene i gassbeholderen. Sinais biljard gir en forenklet, men god beskrivelse av denne modellen. Biljarden ble lansert av Yakov G. Sinai for å illustrere gassens termodynamiske egenskaper; alle baner er ergodiske, som betyr at over litt tid så kommer vi så nær vi måtte ønske en hvilken som helst tilstand for gassen, og systemet har positive Lyapunov-eksponenter, som betyr at gassen oppfører seg på en kaotisk måte. Sinai viste at molekyllbevegelsene i gassen følger banene i Hadamards dynamiske system, slik de ble beskrevet av Jacques Hadamard i 1898, i det første arbeidet som på en systematisk måte studerer kaos.

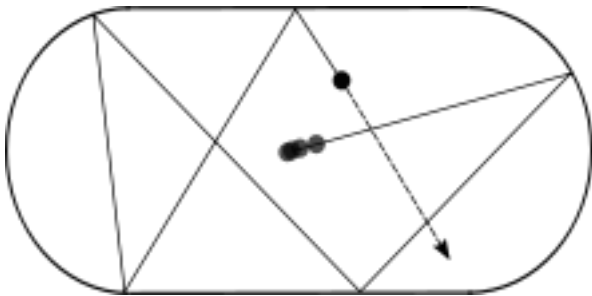
I motsetning til et vanlig biljardbord trenger ikke en dynamisk biljard å være plan. Men i en krum biljard må vi erstatte rettlinjet bevegelse med bevegelse langs geodetiske kurver, dvs. kurver som beskriver korteste vei mellom to punkter på flaten. Siden ballens bevegelse er rettlinjet (geodesisk) med konstant hastighet, holder det å se på sammenstøtene med vantet for å kunne gi en komplett beskrivelse av ballbanen. I tillegg er systemet deterministisk, dvs. at dersom vi har oppgitt posisjon og utgangsvinkel for et sammenstøt med vantet, så vil neste sammenstøt være bestemt. Avbildningen som til en tilstand tilordner den neste tilstanden, kalles biljardavbildningen. Biljardavbildningen beskriver dynamikken i det dynamiske systemet. På tross av biljardenes enkle form, er de svært effektive hjelpemidler til å beskrive og å forstå fenomener vi observerer for ideelle gasser.

I en vanlig rektangulær biljard vil vi ikke observere noen kaotisk oppførsel. Selvfølgelig vil en liten variasjon i utgangspunkt og/eller utgangsretning føre til et større avvik etter hvert, men avviket øker kun lineært med tiden, og ikke eksponensielt. Kaotisk oppførsel er nettopp kjennetegnet ved at dette avviket øker eksponensielt.

I Sinais biljard finner vi ekte kaotisk oppførsel, dvs. at avviket mellom to nærliggende ba-

ABELPRISEN 2014

ner øker eksponensielt med tiden. Vantet i Sinais biljard har to komponenter, det kvadratiske ytre og det sirkulære indre. Fra partikkelens synspunkt framstår det indre vantet som konkav. Lenge var man sikker på at det var denne konkave formen til det indre vantet som var bakgrunnen for den kaotiske oppførselen, og at konkaviteten var en nødvendig forutsetning for fenomenet. Refleksjoner fra en konkav flate vil jo i motsetning til refleksjon fra en konveks flate spre lyset, og derfor også ballbanene i biljarden.



Men i 1974 beviste Bunimovich at et biljardbord formet som et stadion, dvs. med to rette langsider og kortsider erstattet med halvsirkler, produserte ekte kaotisk oppførsel, på tross av at denne biljarden er helt og holdent konveks i formen.

Et eksempel

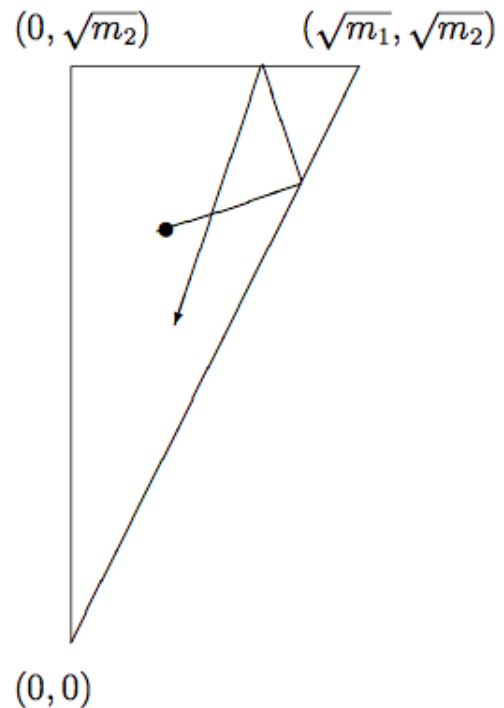
Vi skal se på et enkelt eksempel på en biljard. Den fysiske modellen omfatter to molekyler, og deres bevegelse er innskrenket til å være endimensjonal, i intervallet $[0, 1]$. Vi kan tenke oss at molekylene virrer fram og tilbake i et tynt rør. Endene til røret er blokkert, så hver gang en partikkel treffer enden vil den bli reflektert. Farten er den samme etter refleksjonen, bare motsatt rettet. Når de to partiklene møtes får vi også et elastisk sammenstøt. Det betyr at total bevegelsesmengde, så vel som total energi, bevares ved sammenstøtet. Dersom de to partiklene har masse m_1 og m_2 , hastighet v_1 og v_2 før sammenstøtet og hastighet w_1 og w_2 etter sammenstøtet, gir dette oss de to likningene for bevaring av bevegelsesmengde og energi,

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 \end{aligned}$$

Vi beskriver posisjonen til de to partiklene ved hjelp av to koordinater, x_1 og x_2 , eller satt sammen som et par (x_1, x_2) . Dette paret beskriver en tilstand

for systemet. Tilstandsrommet til systemet skal beskrive alle mulige tilstander. I dette eksempelet krever vi at begge partiklene skal befinne seg inne i røret, dvs. at vi har $0 \leq x_1 \leq 1$ og $0 \leq x_2 \leq 1$. I tillegg er det umulig for de to partiklene å bytte plass, så dersom vi antar at partikkel nr. 2 befinner seg til høyre for partikkel 1, så får vi tilleggsbetingelsen $x_1 \leq x_2$. Vi former et trekantet biljardbord, med hjørner i punktene

$$(0, 0), (0, m_2^{1/2}) \text{ og } (m_1^{1/2}, m_2^{1/2})$$



På bordet lar vi en biljard-kule trille rundt og sprette tilbake etter sammenstøt med veggene. Et punkt (x, y) svarer til at kule nr. 1 befinner seg i posisjon $x_1 = x/m_1^{1/2}$ og kule nr. 2 i posisjon $x_2 = y/m_2^{1/2}$. Dersom kulene kolliderer, så har vi $x_1 = x_2$ som betyr at (x, y) ligger på den skrå linja i biljarden.

En enkel regning gir at bevaring av bevegelsesmengde og energi gir nøyaktig samme betingelser på hastighetene som vi får dersom vi krever at kulas refleksjoner i den trekantede biljarden bevarer fart og er speilende.

Med andre ord, trekant-biljarden gir oss en komplett beskrivelse av dynamikken i den 1-dimensjonale gassmodellen.